# 拡散現象からみた乱流とカオスのダイナミックス(強い相関をもつゆらぎの統計物理学,科研費研究会報告)

AUTHOR(S):
森, 肇

# 拡散現象からみた乱流とカオスのダイナミックス

九大理　森　肇

乱流は，大小様々な不安定な渦，または，周期の様々な不安定な周期運動からなるchaoticな秩序運動である．その発生の機構，臨界現象および乱流輸送現象への関心が統計物理の面にも急速に広がっている．それは，単に面白い現象がおこるということだけでなく，Boltzmann-Gibbsの統計熱力学と異質な，新しい統計的法則がひそんでいると期待されるからであろう．

乱流の物理的構造を捉えるには，通常，時間相関関数またはそのフーリエラプラス変換，つまり，パワースペクトルが使われる．ここでは，粒子の拡散も重要な情報を与えることを示した．粒子の拡散には，1粒子拡散と2粒子の相対拡散とがある．熱平衡のブラウン運動では両者は同じであるが，乱流では全く異なる．それは，乱流の秩序運動のためである．発生直後の弱い乱流では1粒子拡散が重要であり，発達した乱流では相対拡散が重要である．

発達した乱流を考えよう．単位質量あたりの乱流エネルギーの平均値は

$$\langle u^2\rangle/2 = \int_0^\infty E(k)\,dk$$

といろいろの波数 $k$ の成分に分解できる．エネルギー供給の外部的特性長をL，粘性のきく散逸領域の特性長を $l_d$ とすれば，正常カスケード領域 $L^{-1}<k<l_d^{-1}$ では

$$E(k) \sim k^{-\delta_0}(kL)^{-\mu\delta_1} \sim k^{-\delta}, \quad (\delta=\delta_0+\mu\delta_1)$$

というスケール依存性をもつ．ここに $\mu$ は間欠性指数である．これはいろいろのモードへのエネルギー分配則を与える．熱平衡のエネルギー等分配則では $E(k)\sim k^{d-1}$，($d$=系の次元数)であるが，乱流では表1の $\delta$ のようになる(森，1983)．ここで，第1行は3次元乱流のエネルギーカスケード，第2行は2次元乱流のエンストロフィー $\langle\omega^2\rangle/2$ ($\boldsymbol{\omega}=\mathrm{rot}\,\boldsymbol{u}$：渦度ベクトル)のカスケード，第3行はBénard対流の温度ゆらぎ $\langle\theta^2\rangle/2$ のカスケード，第4行は3次元乱流のへりシティ $\langle\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\omega}\rangle/2$ のカスケードである．$\delta_0$ は次元解析からきまるものであるが，$\mu$ は，カスケード量の移動率の揺らぎからきまる統計量であり，発達した乱流の統計的状態を規定する藤坂・森の変分原理(1979)を使ってきめた．

いま2つの粒子をいれると，その距離 $R(t)$ は揺らぎながら増大していく．その2乗平均 $L_*^2(t)\equiv\langle R^2(t)\rangle$ は，統計的に一様で等方的であれば，

$$dL_*^2/dt = A\,L_*^{2-\alpha}, \quad (\alpha\equiv a-\mu=(3-\delta-\mu)/2)$$

にしたがうことがわかる(高吉・森，1982)．ただし $L_*<L$ とした．2次元乱流で

は，表1の第2行から $\alpha = 0$ であり，これは $L_*^2(t) \sim exp(At)$ を与える．
$\alpha \neq 0$ のときは

$$L_*^2(t) \sim t^{\psi}, \quad (\psi = 2/\alpha)$$

がえられる．$\psi$ の値は表1にまとめた． $L_*(t)$ は増大し，L に達する．その后も，一様等方であれば，線形則 $L_*^2(t) = L^2 + K(t - t_c)$ にしたがう．たゞし，$K \equiv A L^{2-\alpha}$ は定数である．

外からエネルギー供給がなければ乱流は減衰する．時刻 t のレイノルズ数が $R_t = R_0/(1+pt)^z$ に従って減衰するとしよう．こゝで p は減衰定数，z は減衰指数である．z の値は乱流によって異なるが，その典型的なものは $z = 1/5,\ 3/7,\ 1$ である．正常カスケード領域の最も大きな渦の直径を $L_t$ とすれば，$L_*(t) < L_t$ と $L_*(t) > L_t$ とでは，拡散法則が異なる．それを，表2の第2段に示した（森，1983）．

このように拡散指数 $\psi$ は，0 から $\infty$ までの諸々の値をとる．熱平衡のブラウン運動では，つねに $\psi = 1$ であった．1からのズレは，その乱流の渦の秩序運動の特徴を反映するものである．

発生直后の弱い乱流では，相対拡散は殆んど起らず，1粒子拡散に，乱流の空間的構造および strange attractor 中の不安定な周期運動が反映される．これも面白い問題であり，機会があればお話ししたい．

表1．正常カスケードの特性指数

| カスケードの保存量 | d | $\delta$ | $\mu$ | $\alpha$ | $\psi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\langle u^2 \rangle/2$ | 3 | $(5+\mu)/3$ | $0{\cdot}341 \simeq \frac{1}{3}$ | 0·439 | 4·56 |
| $\langle \omega^2 \rangle/2$ | 2 | $(9+\mu)/3$ | 0 | 0 | $\infty$ |
| $\langle \theta^2 \rangle/2$ | 3 | $(11+3\mu)/5$ | $0{\cdot}261 \simeq \frac{1}{4}$ | 0·191 | 10·5 |
| $\langle \underset{\sim}{u} \cdot \underset{\sim}{\omega} \rangle/2$ | 3 | $(7+\mu)/3$ | $0{\cdot}203 \simeq \frac{1}{5}$ | 0·198 | 10·1 |

第1行　：　通常の3次元乱流
　2　　：　　　2次元乱流
　3　　：　Bénard 対流（温度の揺らぎ $\langle \theta^2 \rangle/2$ が正常カスケード）
　4　　：　ヘリシティをもつ3次元乱流

TABLE 2. DIFFUSION EXPONENT $\psi$ OF THE RELATIVE DIFFUSION

| | d | $L_*^2(t) \sim t^\psi$ | $\psi$ | |
|---|---|---|---|---|
| steady ($p=0$) | 2 | $e^{At}$, $(\alpha = 0)$ | $\infty$ | $\langle\omega^2\rangle/2$ |
| $L_*(t) \lesssim L$ | 3 | $t^{2/\alpha}$, $(\infty > \psi = \frac{2}{\alpha} > 2)$ | 10.5 | $\langle\theta^2\rangle/2$ |
| | | | 10.1 | $\langle u \cdot \omega\rangle/2$ |
| | | | 4.56 | $\langle u^2\rangle/2$ |
| $L_*(t) >> L$ | | $t$ | 1 | purely random |
| decaying ($p\neq 0$) | 2 | $(1+pt)^{A_0/p}$, $(\alpha = 0)$ | | |
| $L_*(t) < L_t$ | 3 | $[(1+pt)^{1-x}-1]^{2/\alpha}$, $(x = 1 - \alpha(1-z)/2 \neq 1)$ | | |
| | | $[\ln(1+pt)]^{2/\alpha}$, $(x = 1)$ | | |
| $L_*(t) >> L_t$ | | $t^{1-z}$, $(1 > \psi = 1-z > 0)$ | 0.80 | $z = 1/5$ |
| | | | 0.57 | $z = 3/7$ |
| | | $\ln t$, $(z = 1)$ | 0 | |